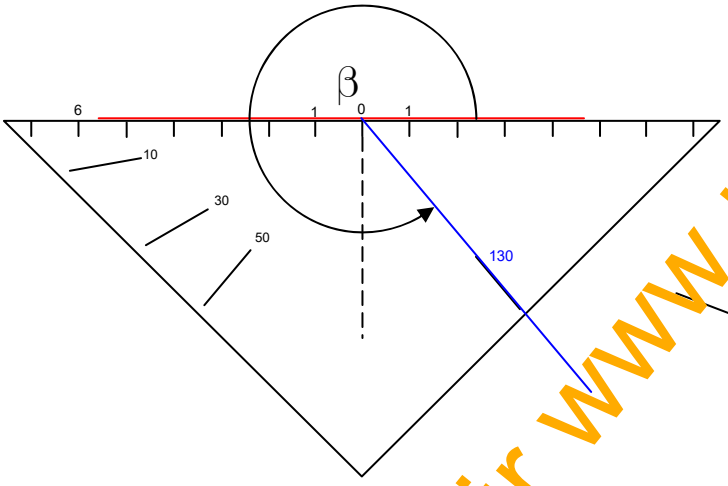
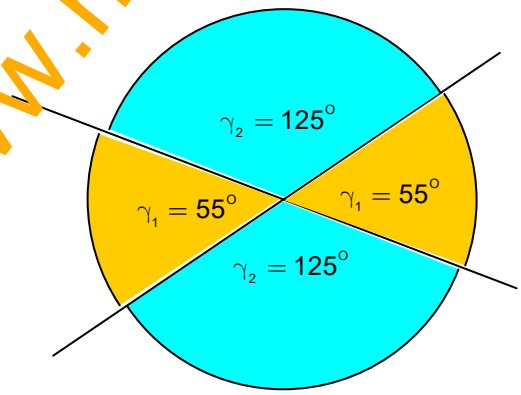
Geometrie

Winkel





Demo-Text für www.mathe-cd.de

Stand: 7. Februar 2021

Datei Nr. 11101

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1.	**Drehungen durch Winkel messen**	3
	Zeichnen von Winkeln mit dem Geodreieck	5
	Kopiervorlagen mit Geodreieck	7
	Kopiervorlage: Winkel	12
2.	**Nebenwinkel und Scheitelwinkel**	14
	Kopiervorlagen (Aufgabenblätter 7 bis 11)	17 – 21
3	**Winkel an parallelen Geraden:**	**22**
	Scheitelwinkel, Stufenwinkel und Wechselwinkel	22
Lösungen zu den Aufgabenblättern:		24 - 28

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1. Drehungen durch Winkel messen

Lesetext zum Verständnis

Wenn man einen Punkt A um einen Punkt M drehen soll, dann kann man das mit dem Zirkel darstellen. Die Zirkelspitze wird in M eingestochen und die Zirkelmine auf A gesetzt. Dann dreht man und der Zirkel zeichnet dabei die Spur auf, die der Punkt A (die Mine) bei der Drehung hinterlässt. Das Ergebnis ist bei einer Volldrehung ein Kreis (eine Kreislinie). Dreht man weniger, dann nennt man es einen Kreisbogen.

Abbildung 1 zeigt eine Volldrehung des Punktes A um den Punkt M. Der kleine (blaue) Pfeil auf der Kreislinie gibt die Drehrichtung an. Die Mathematiker bezeichnen die Drehrichtung gegen den Uhrzeigersinn als positive Drehrichtung.

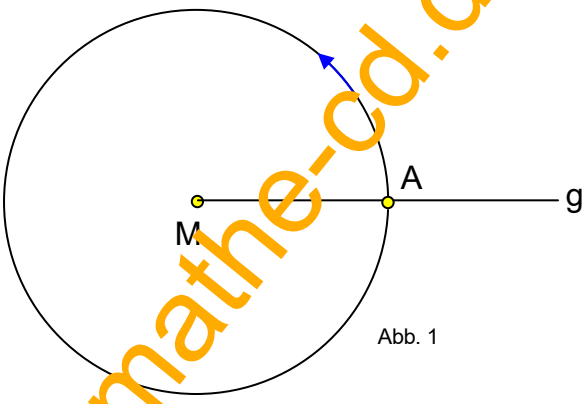


Abb. 1

Wenn nichts anderes angegeben ist, drehen wir immer genau in dieser Richtung!

M ist der Mittelpunkt des Kreises, die Strecke MA heißt der Radius r des Kreises.

Von M aus geht nach rechts durch A eine Halbgerade. Diese hat den Anfangspunkt M und keinen Endpunkt. Oftmals denkt man sich bei einer Drehung nicht nur einen Punkt sondern die Halbgerade g gedreht. Es werden also alle Punkte dieser Halbgeraden gedreht, und sie beschreiben dabei jeweils einen Kreis, dessen Radius gleich dem Abstand zum Mittelpunkt ist.

Die folgenden Abbildungen zeigen eine Vierteldrehung von g, eine Halbdrehung von g und eine Dreivierteldrehung von g. Die Drehungen erzeugen dann jeweils eine neue Halbgerade, der ich den Namen h gebe.

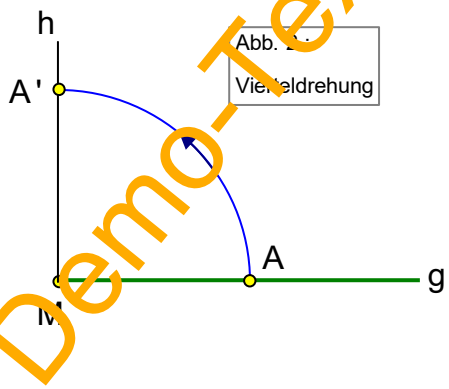


Abb. 2 : Vierteldrehung

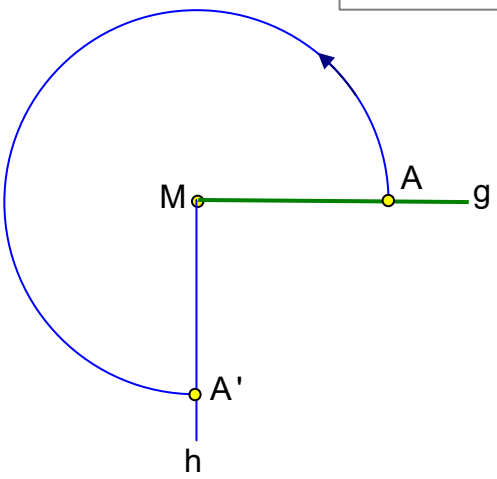


Abb. 4 : Dreivierteldrehung

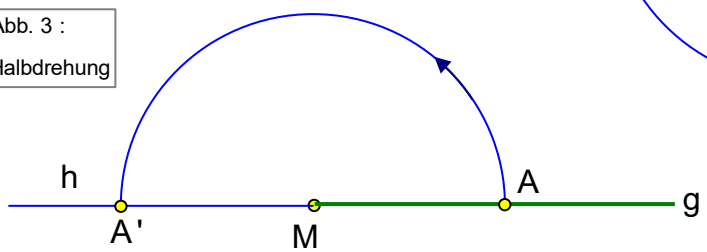


Abb. 3 : Halbdrehung

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Es gibt natürlich auch andere Drehungen, wie diese beiden Abbildungen zeigen:

Abb. 5

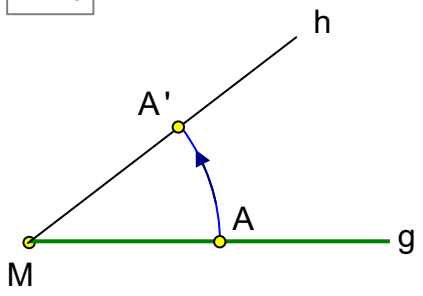
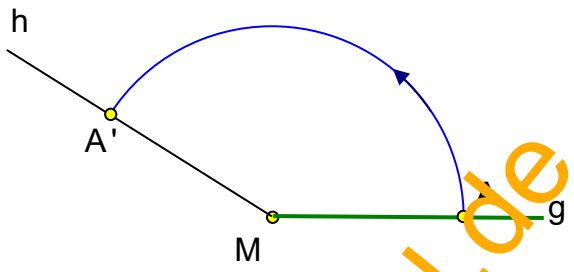
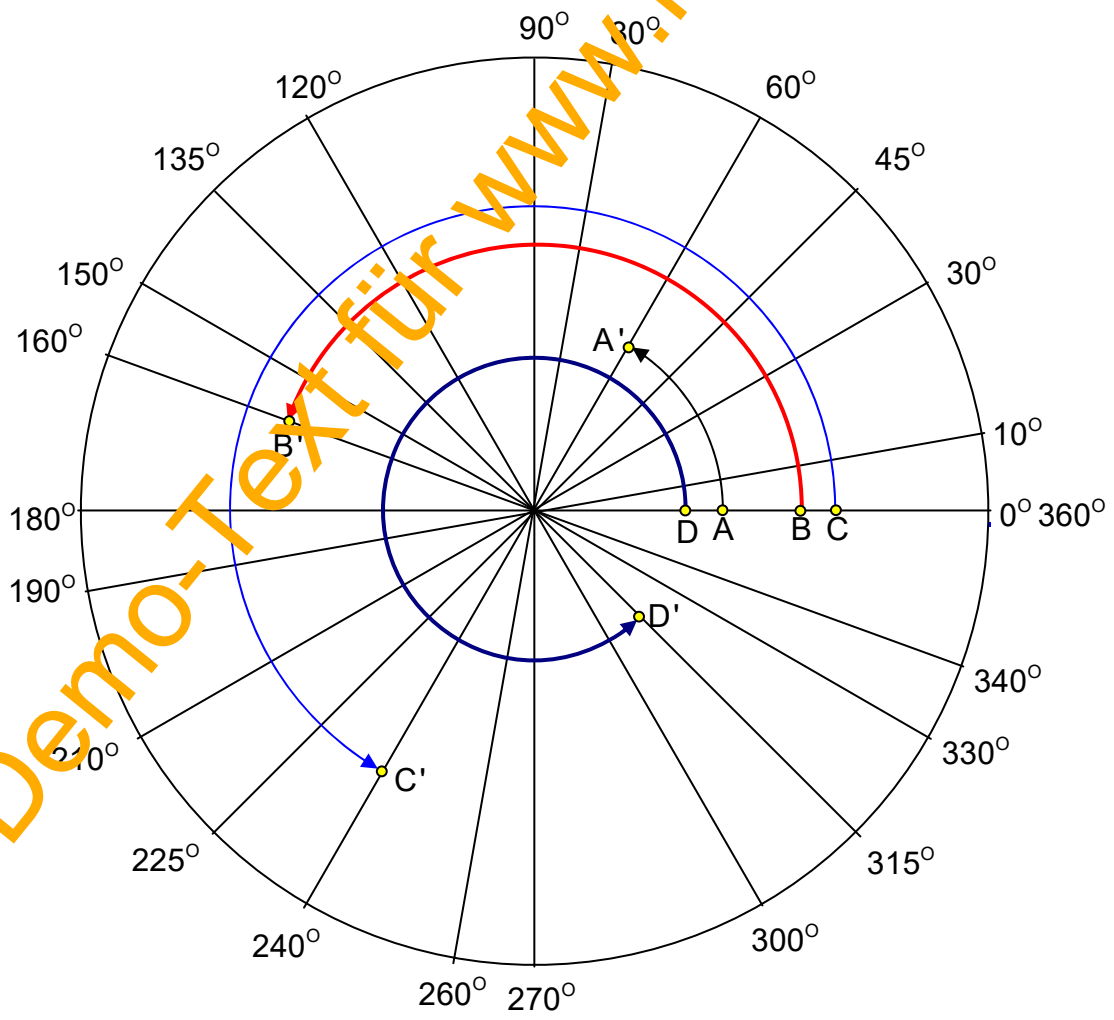


Abb. 6



Um zu beschreiben, wie groß die Drehungen ausgefallen sind, haben Menschen schon vor über 2000 Jahren begonnen, die Volldrehung in 360 gleiche Teile einzuteilen. 1 Teil nennt man 1 Grad und schreibt dies so auf: 1°.
Zur Volldrehung gehört dann der <u>Vollwinkel</u> mit der Größe 360°.
Zur Halbdrehung gehört der halbe Vollwinkel, also 180°. Die Vierteldrehung gehört zu einem Winkel von 90° und die Dreivierteldrehung zu 270°.

Die folgende Abbildung zeigt vier Drehungen von A um 60°, B um 160°, C um 240° und D um 315°. Weitere Winkeleinteilungen sind dargestellt.

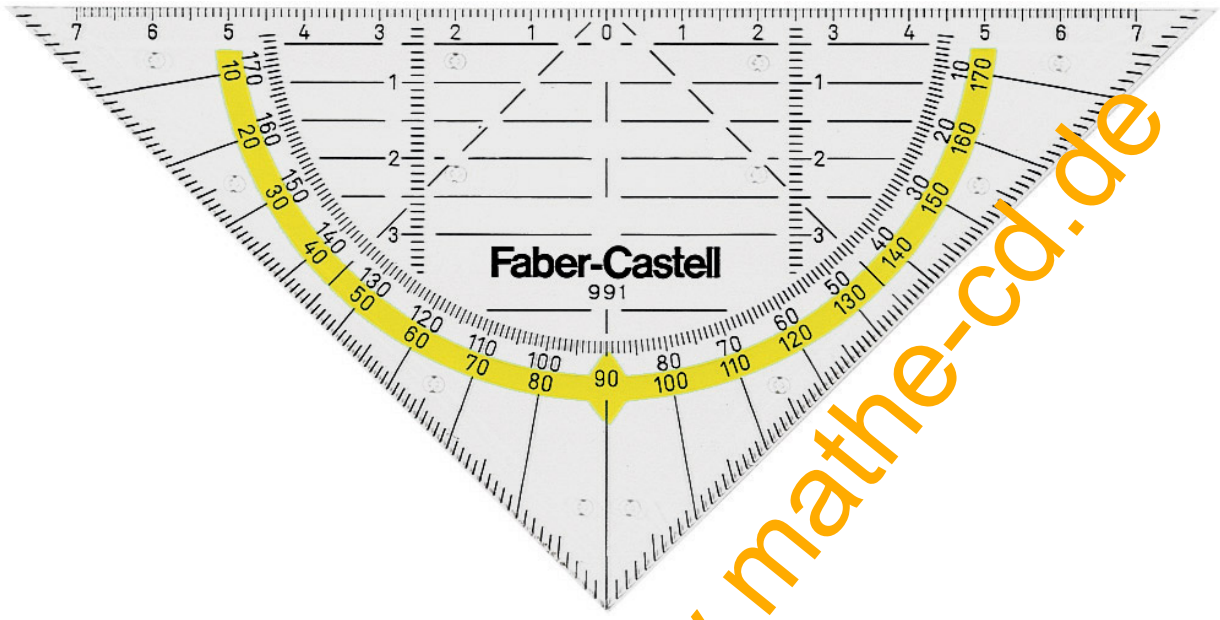


Eine Drehung um 360° führt zum selben Endergebnis wie eine Drehung um 0°: Beide verändern nichts.

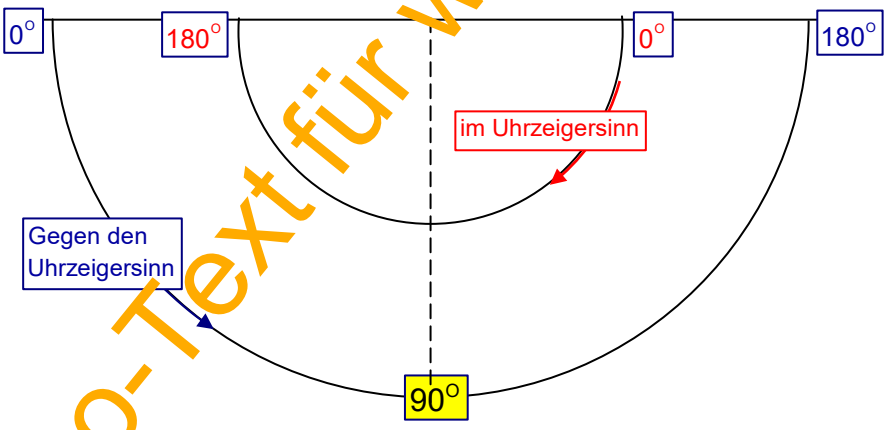
Demo-Text für www.mathe-cd.de

Zeichnen von Winkeln mit dem Geodreieck

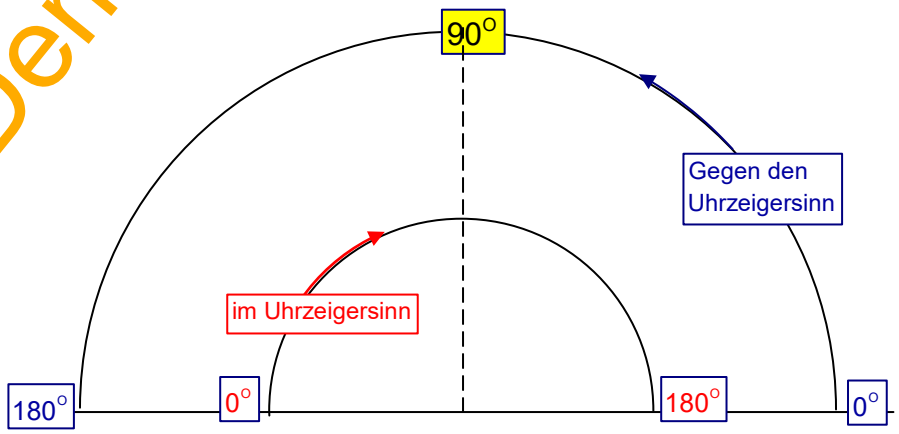
Ein Geodreieck enthält zwei Skalen von Gradeinteilungen.



Die für uns wichtige Einteilung läuft gegen den Uhrzeigersinn (gelb unterlegt), die zweite Skala läuft entgegengesetzt dazu.



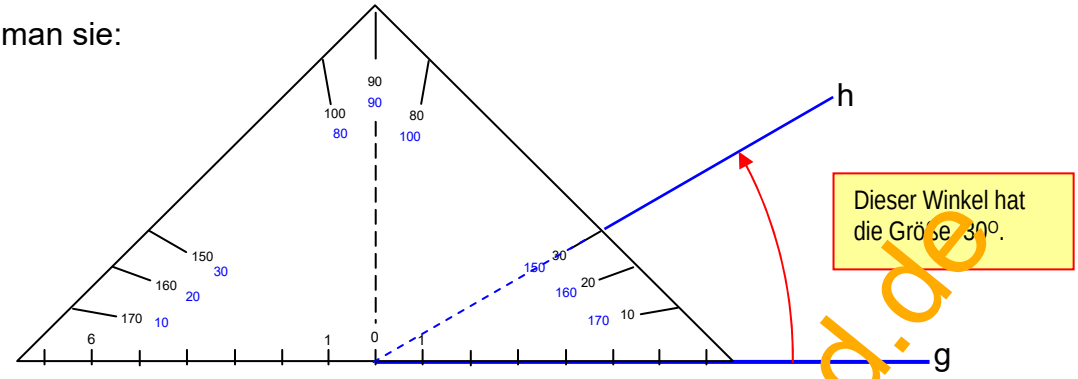
Oder in anderer Lage:



Demo-Text für www.mathe-cd.de

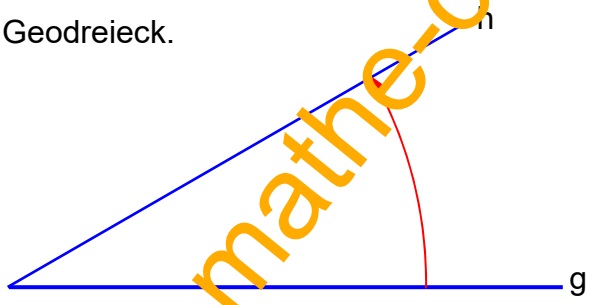
Spitze Winkel haben eine Größe zwischen 0° und 90°:

So zeichnet man sie:



Und dies ist ein 30° Winkel ohne das Geodreieck.

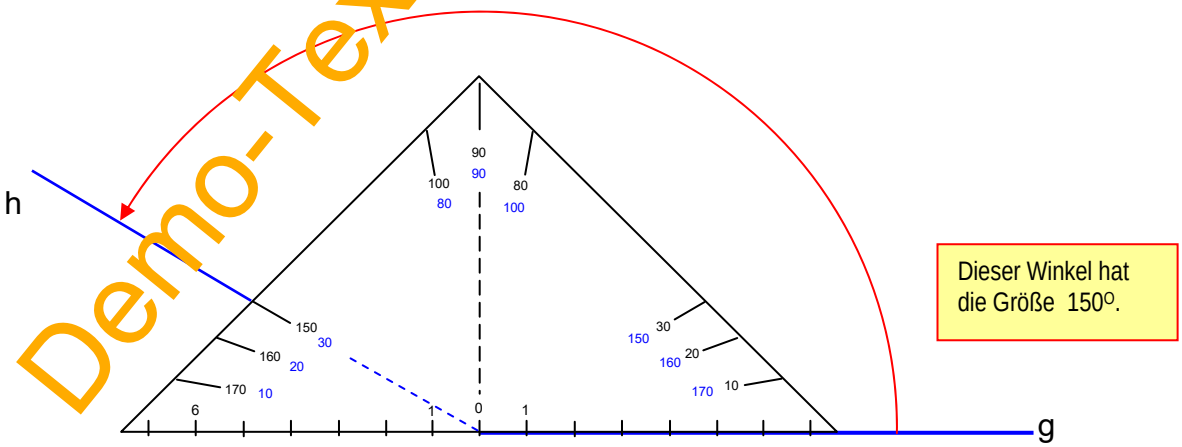
Übrigens ist es egal, welchen Radius der Kreisbogen erhält, weil man ja jeden Punkt der Halbgeraden um 30° gedreht hat !



Stumpfe Winkel haben eine Größe zwischen 90° und 180°.

Die untere Abbildung zeigt, wie man einen 150°-Winkel zeichnet.

Hier besteht die Gefahr, dass man versehentlich 30° abliest, dann hat man die innere Skala verwendet. Für die Drehung gegen den Uhrzeigersinn gilt jedoch die äußere Skala.

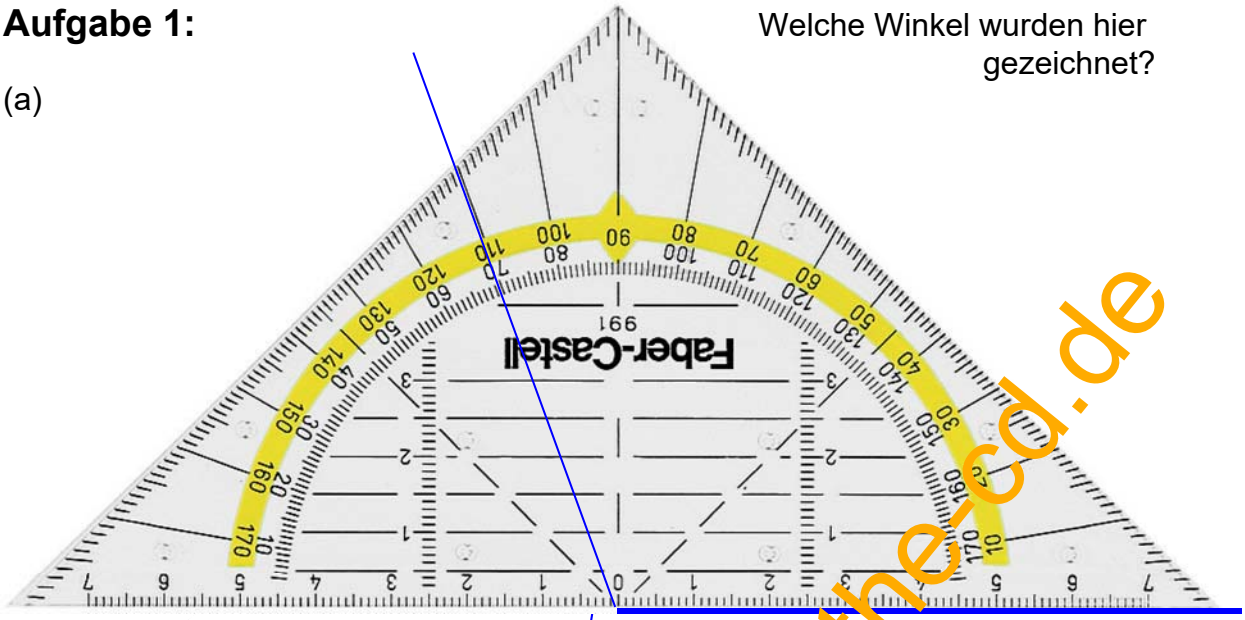


Demo-Text für www.mathe-cd.de

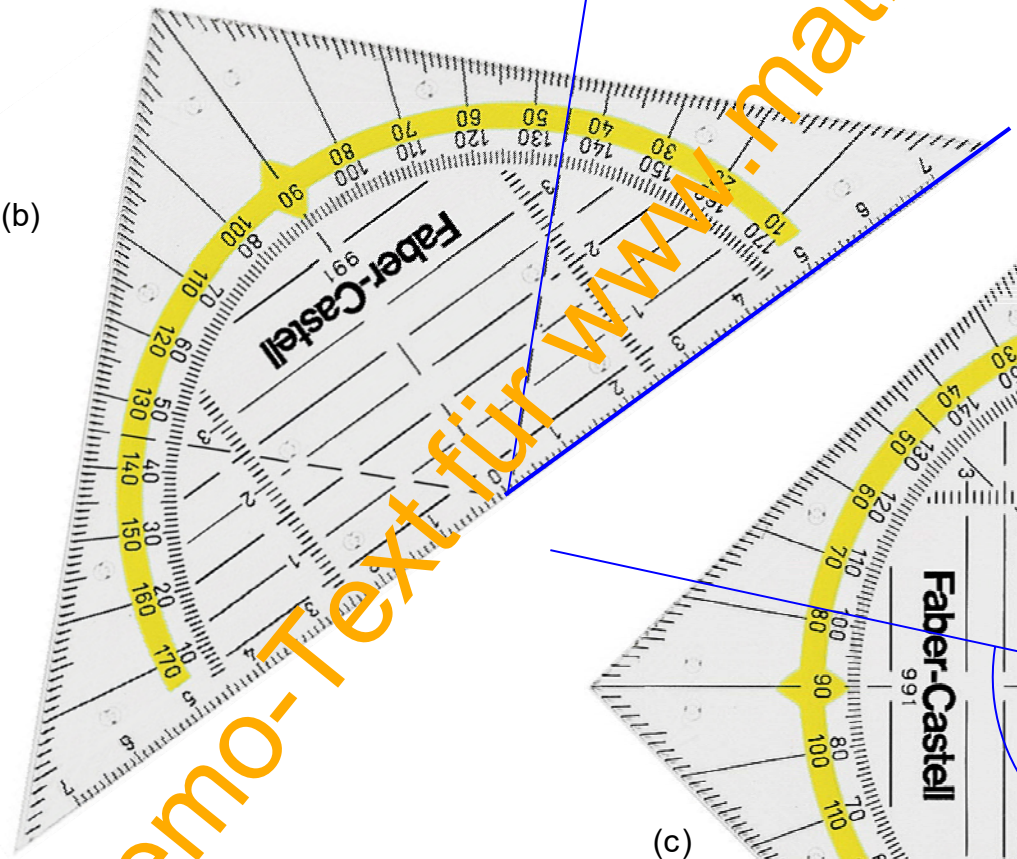
Aufgabe 1:

Welche Winkel wurden hier gezeichnet?

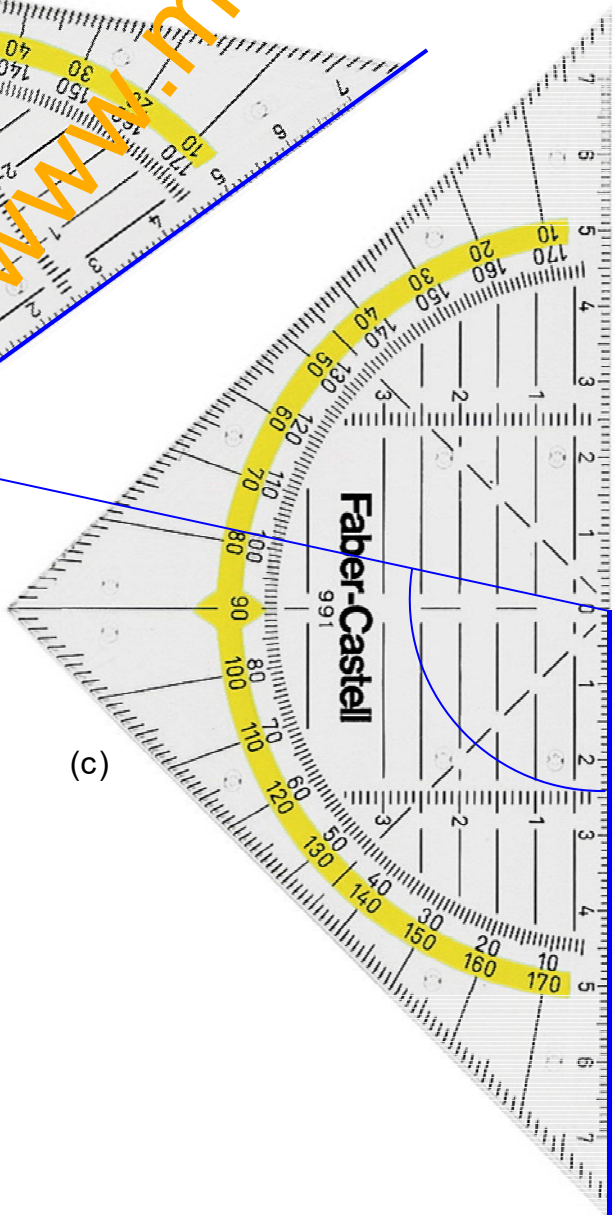
(a)



(b)



(c)



Demo-Text für www.mathe-cd.de

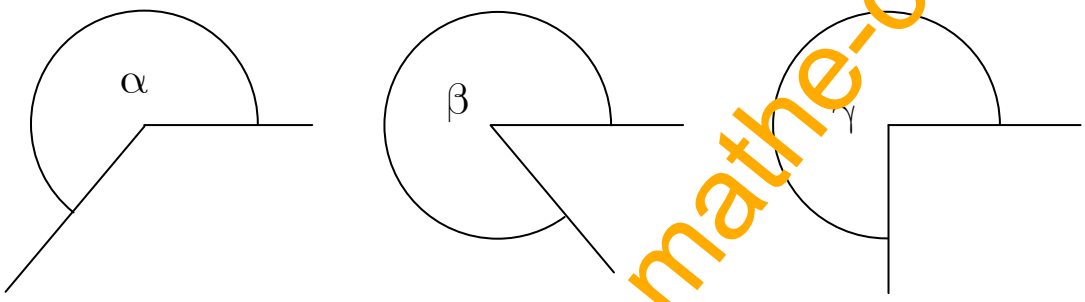
Lösung 1

(a) zeigt einen Winkel mit 110° , denn die dicke Linie an der Kante des Dreiecks liegt bei 0° .
Nun zählt man entlang der gelben Skala bis 110°.

(b) zeigt einen 45° – Winkel.

(c) birgt eine Falle. Hier ist der Winkel mit einem blauen Kreisbogen markiert.
Man muss hier ausnahmsweise die Skala verwenden, die nicht gelb unterlegt ist, also im Uhrzeigersinn zählt. Denn sie beginnt an der Halbgeraden bei 0°. Daher kommt man zu 102° !

Überstumpfe Winkel haben eine Größe über 180° und unter 360°.



Man verwendet als Namen für Winkel kleine griechische Buchstaben:

α bedeutet Alpha, β bedeutet Beta γ bedeutet Gamma.

Aufgabe 2

Miss mit Hilfe deines Geodreiecks die Größen dieser drei Winkel.
Schreibe das Ergebnis so auf: $\alpha = 120^{O}$ (der Wert stimmt nicht!) usw.

Die Lösung steht auf der nächsten Seite.

MERKE:

Name	Winkelgröße
Spitzer Winkel	zwischen 0° und 90°
Rechter Winkel	90°
Stumpfer Winkel	zwischen 90° und 180°
Gestreckter Winkel	180°
Überstumpfer Winkel	zwischen 180° und 360°
Vollwinkel	360°

Aufgabe 3: Schreibe in die Kästchen hinter der Maßzahl ***sp*** oder ***st*** oder ***üs*** oder ***re*** oder ***ge***, je nachdem, ob es sich um einen spitzen, stumpfen, überstumpfen, rechten oder gestreckten Winkel handelt:

125° ☐, 89° ☐, 300° ☐, 191° ☐, 180° ☐, 48° ☐, 105° ☐

350° ☐, 15° ☐, 122° ☐, 214° ☐, 57° ☐, 175° ☐, 270° ☐

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Lösung 2: $\alpha = 230^\circ$, $\beta = 310^\circ$ und $\gamma = 270^\circ$.

Lösung 3:

125° **st**, 89° **sp**, 300° **üs**, 191° **üs**, 180° **ge**, 48° **sp**, 105° **st**

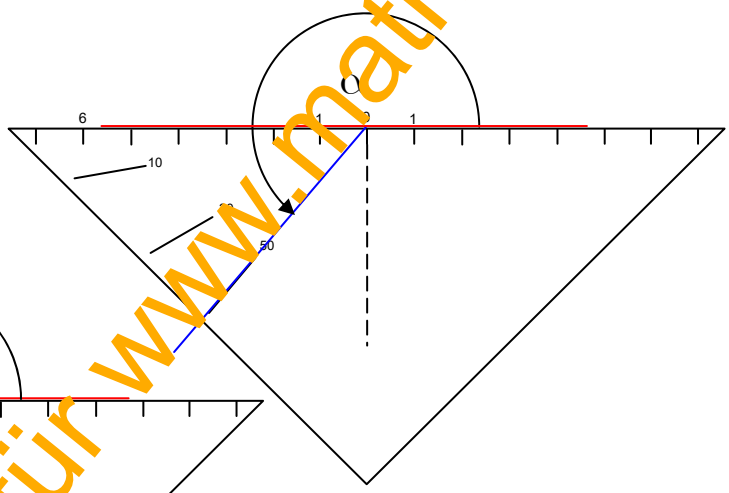
350° **üs**, 15° **sp**, 122° **st**, 214° **üs**, 57° **sp**, 175° **st**, 270° **üs**

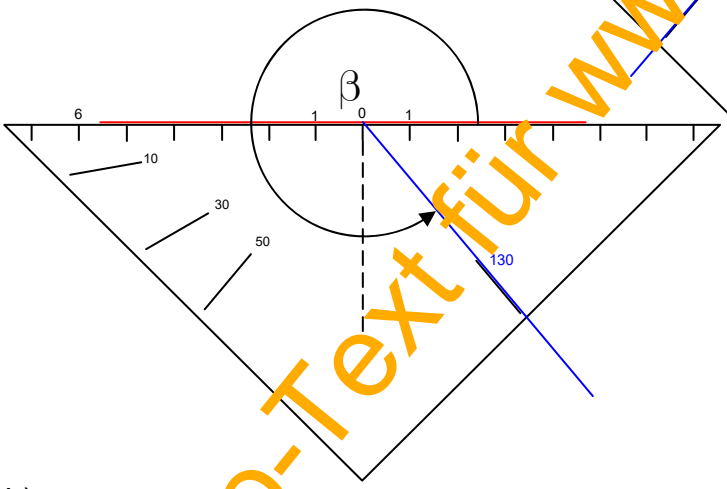
So werden überstumpfe Winkel gezeichnet bzw. gemessen:

Winkel mit mehr als 180° kann man nicht durch einfaches Anlegen eines Geodreiecks zeichnen oder messen.
Man muss ermitteln, um wie viel Grad sie über 180° hinausgehen.

Dazu legt man das Geodreieck unter der roten Linie (die 180° markiert) an und liest 50° ab, also erhält man

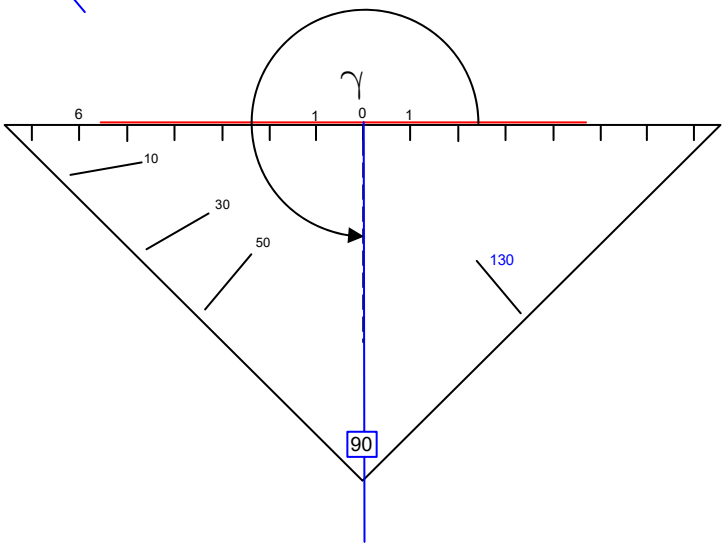
$\alpha = 180^\circ + 50^\circ = 230^\circ$





b) Hier addiert man
$\beta = 180^\circ + 130^\circ = 310^\circ$

c) Und hier erhält man
$\gamma = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$.



Aufgabe 4

Zeichne Winkel mit diesen Größen:

a) $\alpha = 330^\circ$
b) $\beta = 225^\circ$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Lösung 4a: $\alpha = 330^{O}$

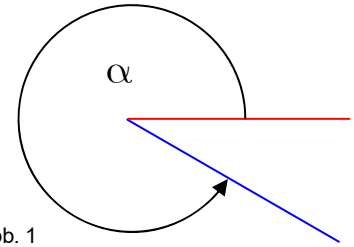


Abb. 1

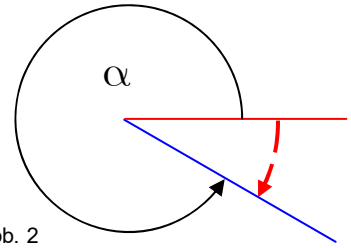


Abb. 2

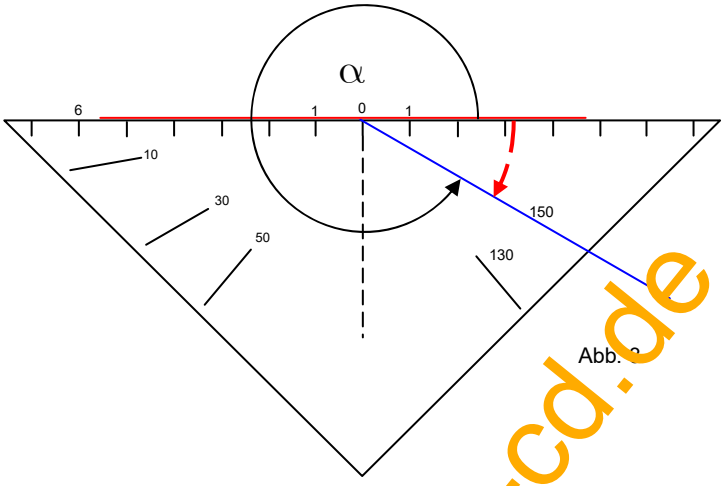


Abb. 3

Das Zeichnen eines 330°-Winkels geschieht entweder durch Addition von 180° (gestreckter Winkel) und einem Winkel der Größe 150° (Abbildung 1),

oder (als zweite Möglichkeit) indem man sich den Vollwinkel 360° vorstellt und dann „um 30° zurückdreht“, was durch Abbildung 2 angedeutet wird. Abbildung 3 zeigt die Lage des Geodreiecks.

Lösung 4b: $\beta = 225^{O}$

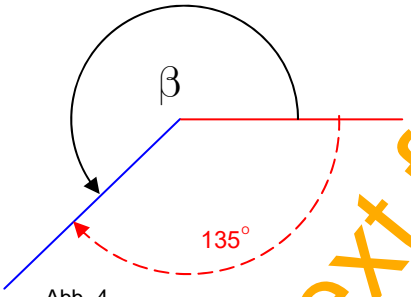


Abb. 4

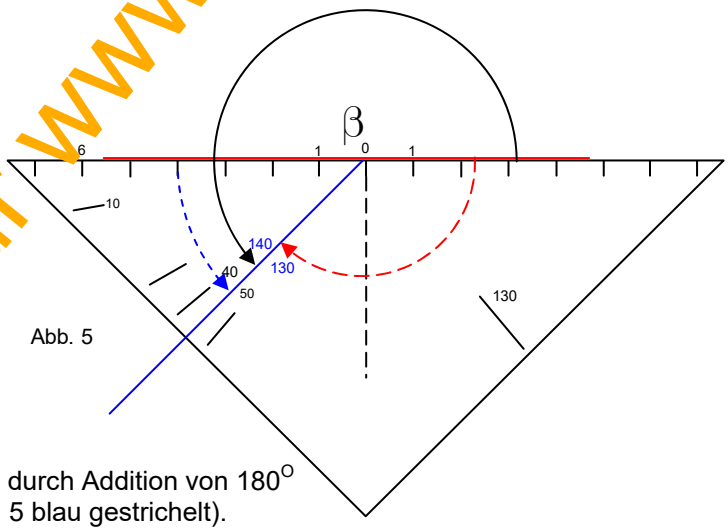


Abb. 5

Das Zeichnen eines 225°-Winkels geschieht durch Addition von 180° und einem Winkel der Größe 45° (Abbildung 5 blau gestrichelt).
Dem entspricht dann in Abb. 5 der schwarze Kreisbogenpfeil.
Oder man stellt sich den 360° Vollwinkel vor und „dreht um 135° zurück“, was der rote untere Kreisbogenpfeil in beiden Abbildungen zeigt.

Wenn man dann 135° gezeichnet hat, muss man den gesuchten Winkel β durch einen Kreisbogen als den Winkel kennzeichnen, der nun mal gesucht ist.

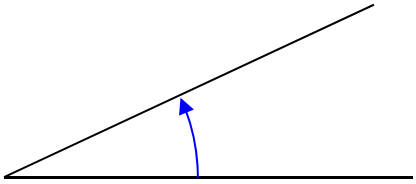
Aufgabe 5: Zeichne folgende Winkel:

(1)	25°	(2)	52°	(3)	100°	(4)	159°
(5)	187°	(6)	234°	(7)	275°	(8)	324°.

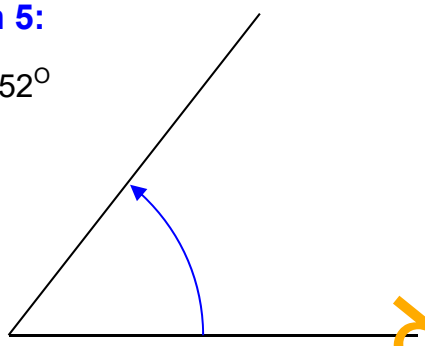
Demo-Text für www.mathe-cd.de

Lösungen 5:

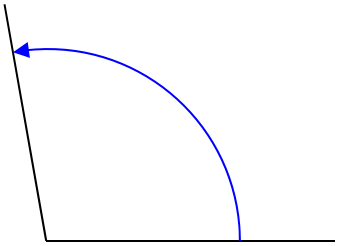
(1) 25°



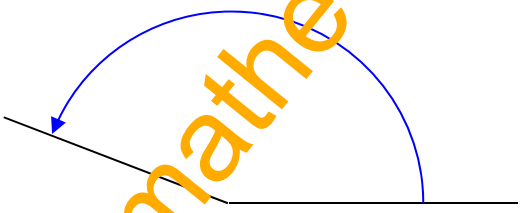
(2) 52°



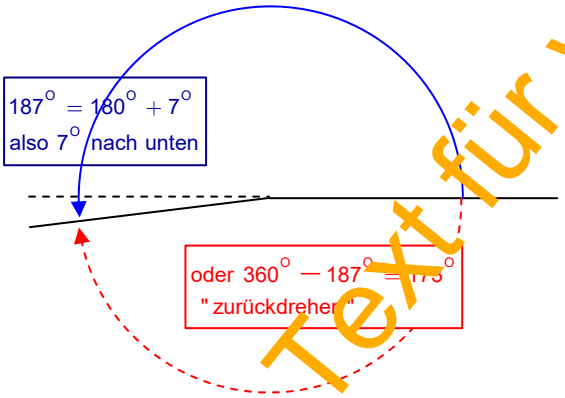
(3) 100°



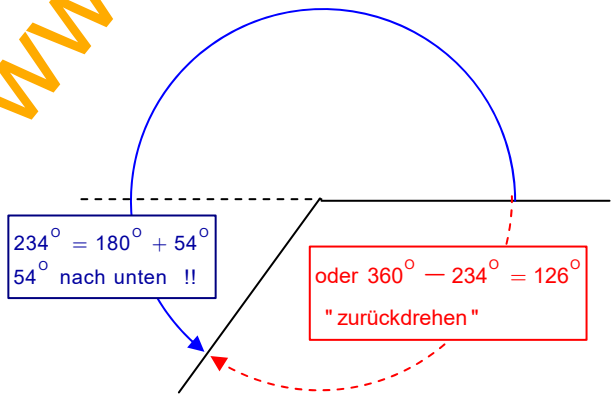
(4) 159°



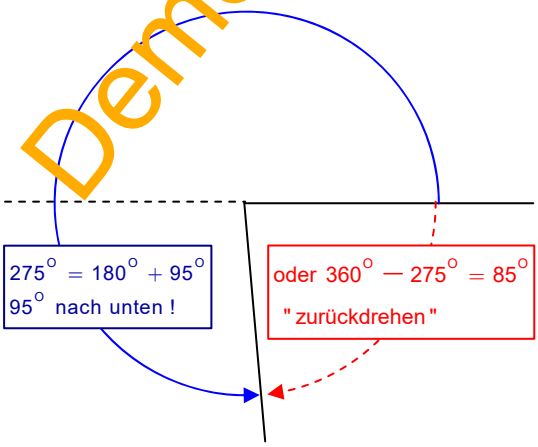
(5) 187°



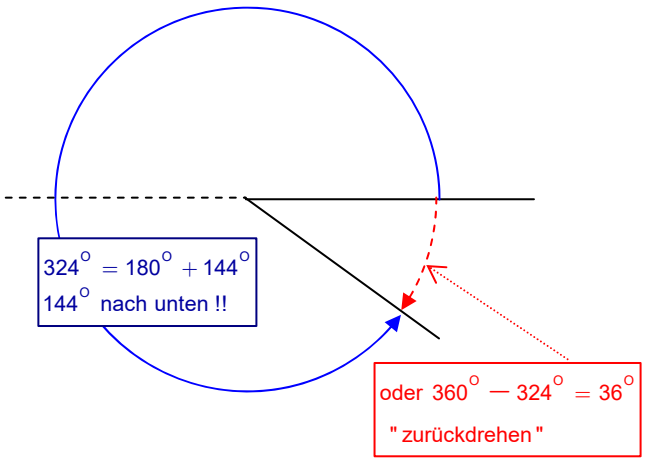
(6) 234°



(7) 275°



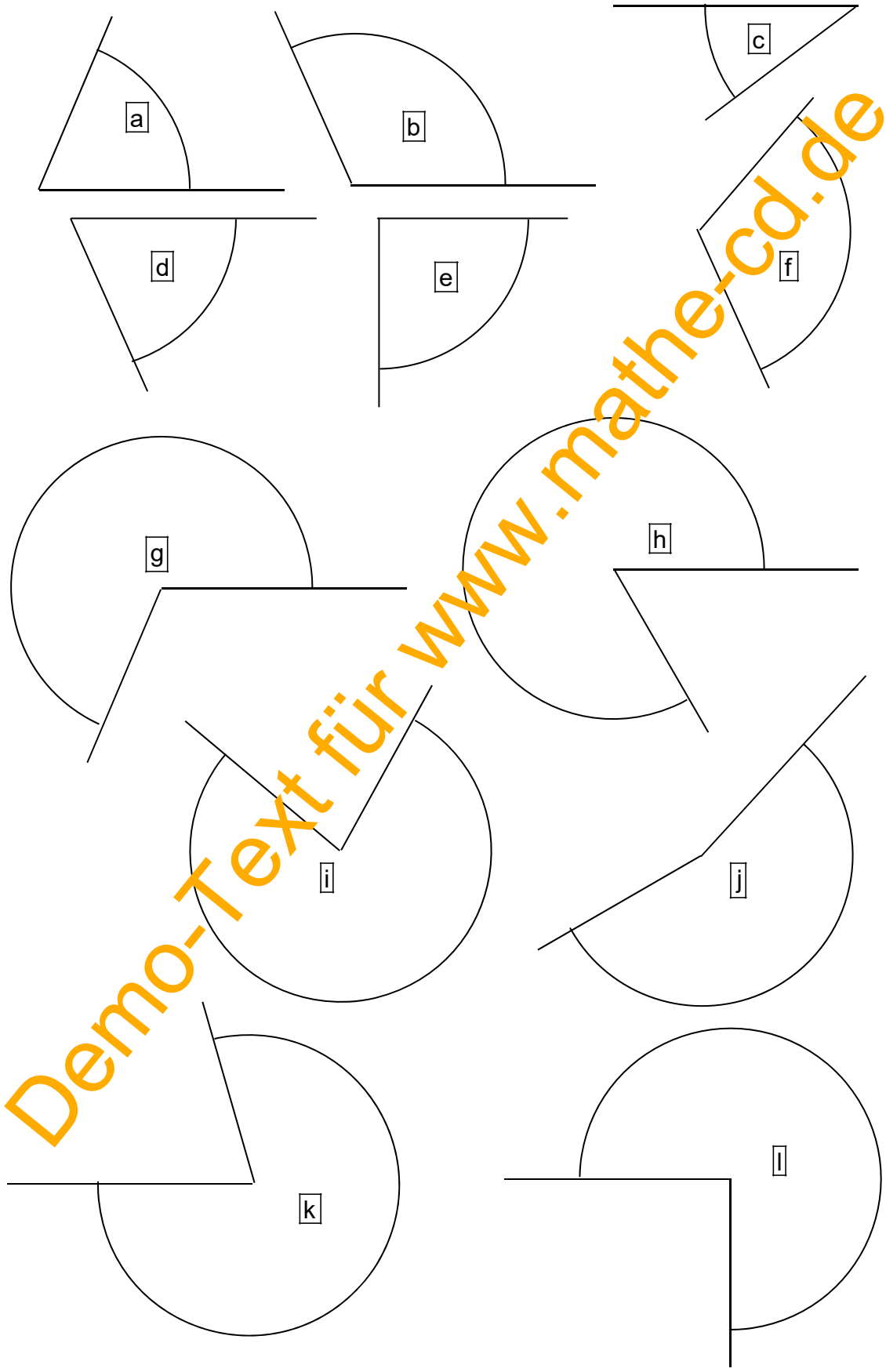
(8) 324°



Demo-Text für www.mathe-cd.de

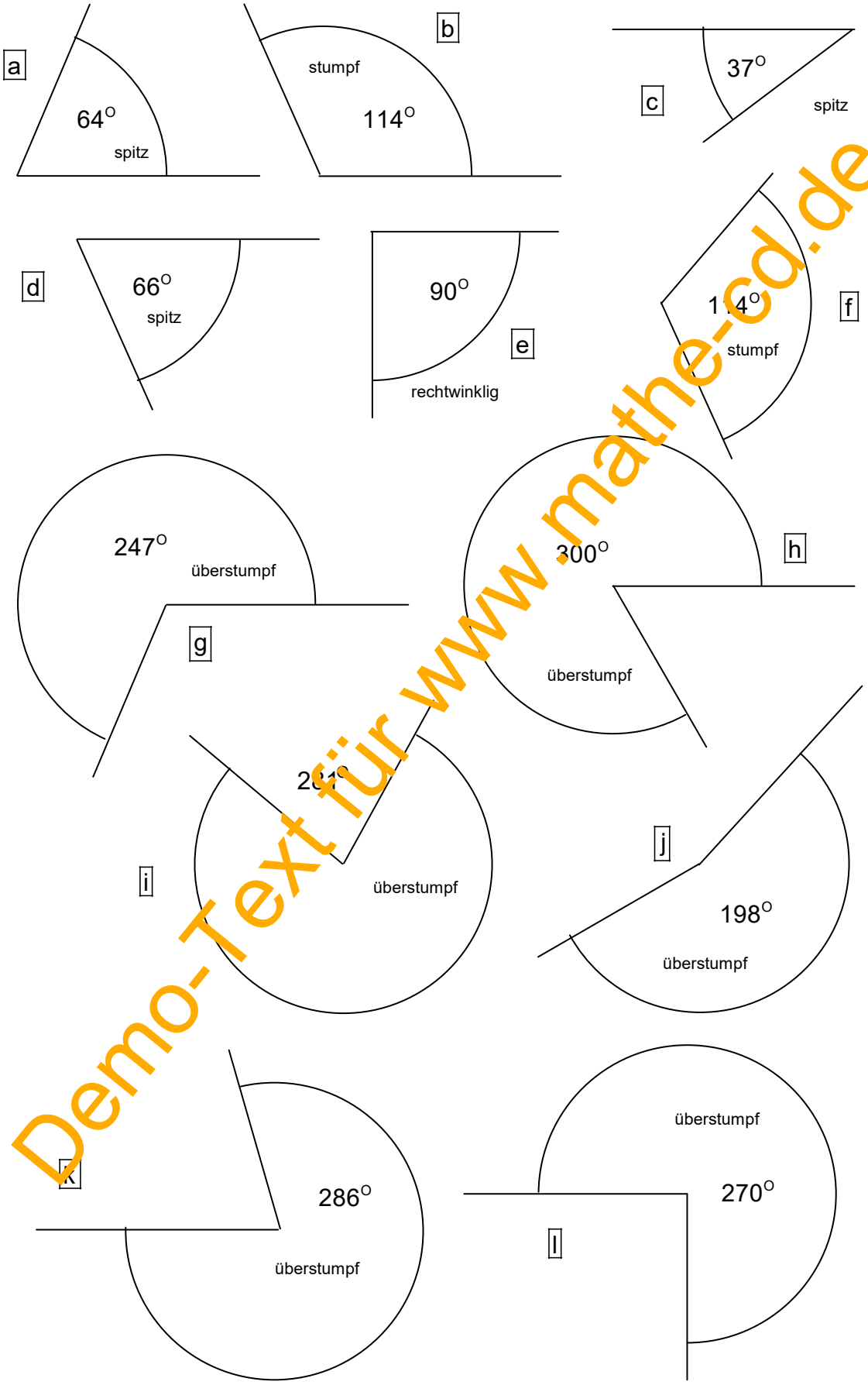
Aufgabe 6:

a) Notiere zu jedem Winkel, ob er spitz, stumpf oder überstumpf oder gar rechtwinklig ist.
b) Miss die Größe dieser Winkel. Verlängere bei Bedarf einen Schenkel.



Demo-Text für www.mathe-cd.de

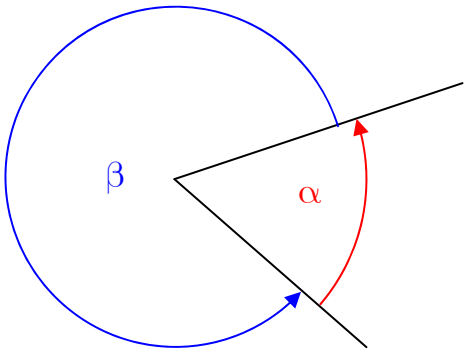
Lösung 6



Demo-Text für www.mathe-cd.de

2. Nebenwinkel und Scheitelwinkel

Zwei Halbgeraden, die denselben Anfangspunkt haben, bilden zwei Winkel. Ihre Summe beträgt 360°.



$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

Zwei Geraden, die sich schneiden, bilden vier Winkel.

(Je zwei nebeneinander liegende heißen Nebenwinkel.

Deren Summe ist 180°.

Nebenwinkel sind

α und β: $\alpha + \beta = 180^\circ$

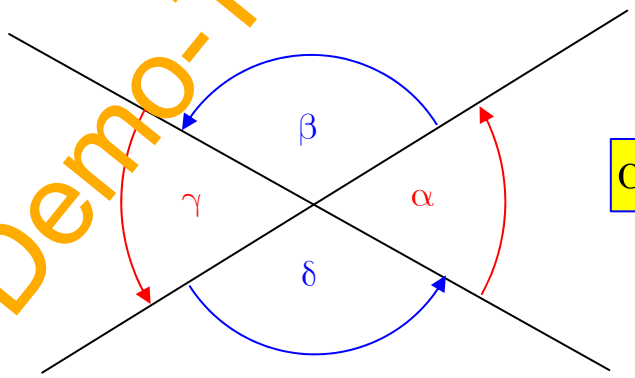
β und γ: $\beta + \gamma = 180^\circ$

γ und δ: $\gamma + \delta = 180^\circ$

δ und α: $\delta + \alpha = 180^\circ$

Je zwei gegenüberliegende heißen Scheitelwinkel.

Scheitelwinkel sind immer gleich groß



$$\alpha = \gamma \text{ und } \beta = \delta$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabe 7

In nebenstehender Figur ist $\alpha = 34^{\circ}$

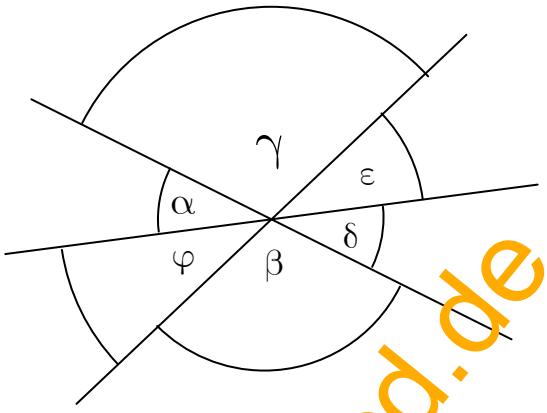
und $\gamma = 110^{\circ}$.

Berechne die Größe der restlichen Winkel.

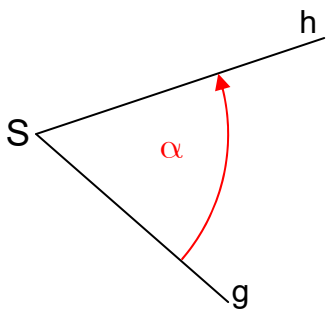
Lösung auf der nächsten Seite

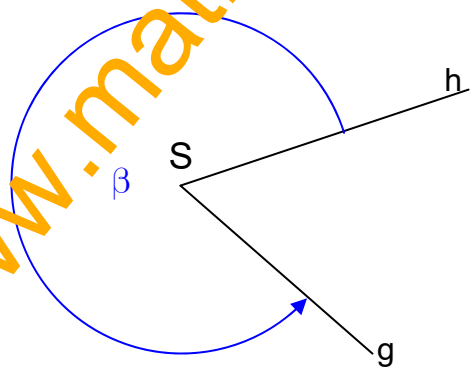
Hinweis:

δ heißt Delta und φ heißt Phi !



Eine neue Schreibweise und Gedanken zum Verständnis !





Es ist oft hilfreich, den Begriff Winkel gegebenenfalls mit einer Drehung zu verbinden:

In der linken Abbildung wurde die Halbgerade g um den Punkt S um den Winkel α gedreht. Dabei geht g in h über.

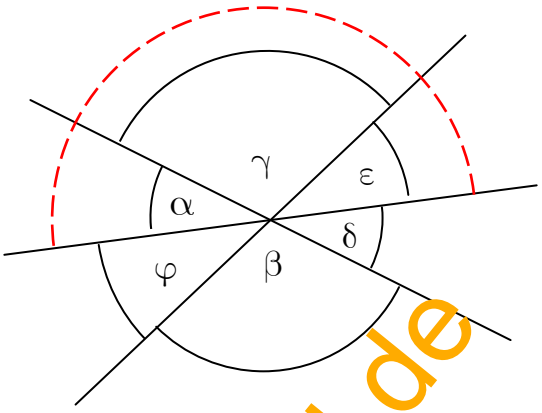
Daher schreibt man statt α auch oft $\angle gh$.

In der rechten Abbildung wurde h um S um den Winkel β gedreht: Aus h wurde g.

Daher schreibt man statt β auch oft $\angle hg$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Lösung 7



Gegeben waren $\alpha = 34^{\circ}$ und $\gamma = 110^{\circ}$.
Dann kennt man auch die Größe ihrer Scheitelwinkel, denn Scheitelwinkel sind gleich groß:

δ ist Scheitelwinkel zu α: $\delta = \alpha = 34^{\circ}$.

β ist Scheitelwinkel zu γ: $\beta = \gamma = 110^{\circ}$

Nun muss man erkennen, dass $\alpha + \gamma + \varepsilon = 180^{\circ}$ ergeben (siehe roter Halbkreis!)
Also muss man von 180° α und γ subtrahieren um ε zu erhalten:

$$\varepsilon = 180^{\circ} - \alpha - \gamma = 180^{\circ} - 34^{\circ} - 110^{\circ} = 36^{\circ}$$

oder so: $\varepsilon = 180^{\circ} - (\alpha + \gamma) = 180^{\circ} - \left(34^{\circ} + 110^{\circ}\right) = 180^{\circ} - 144^{\circ} = 36^{\circ}$

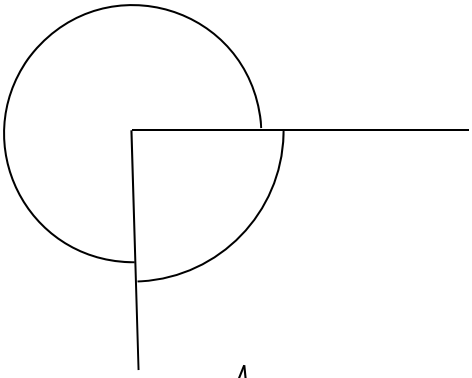
φ ist Scheitelwinkel zu ε, also ist $\varphi = \varepsilon = 36^{\circ}$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabenblatt 8 (Lösungen am Textende)

Die folgenden Halbgeraden bilden 2 Winkel. Miss beide.

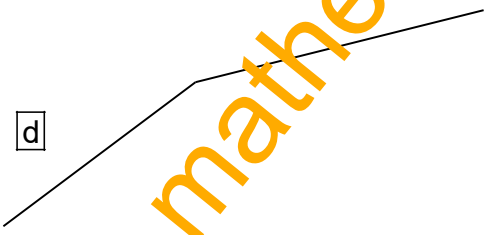
a



b

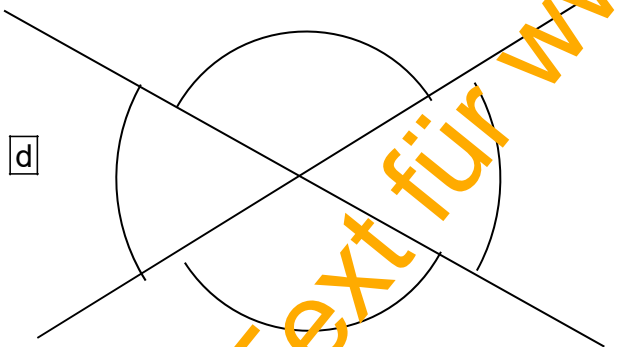
c

d

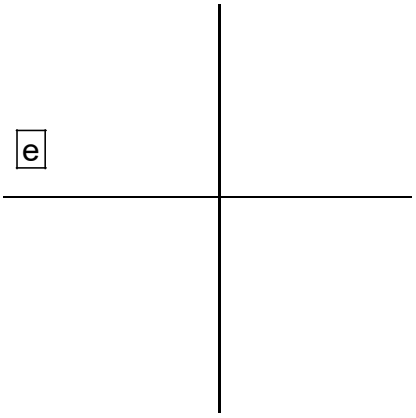


Die folgenden Geraden bilden 4 Winkel. Miss sie alle.

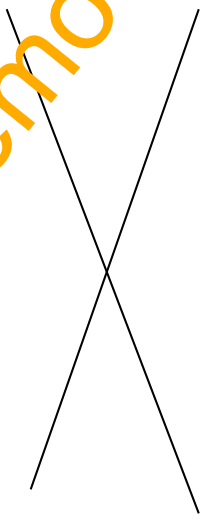
d



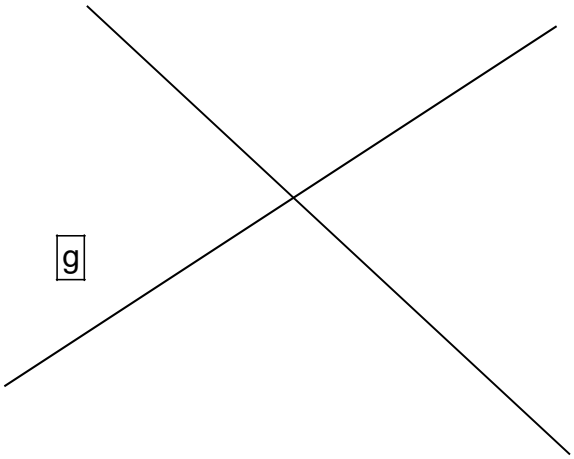
e



f



g

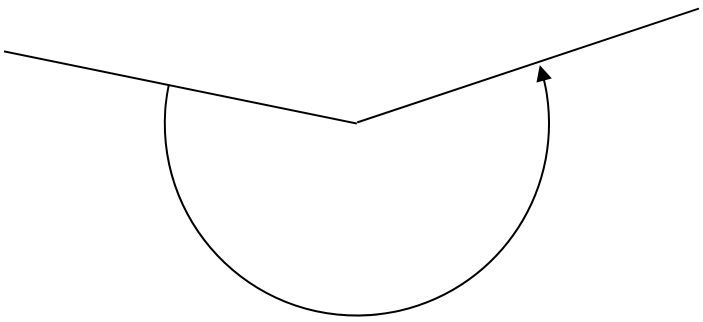


Demo-Text für www.mathe-cd.de

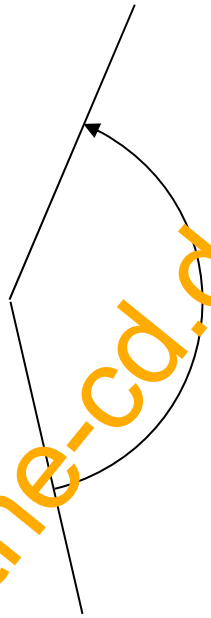
Aufgabenblatt 9

Miss folgende Winkel:

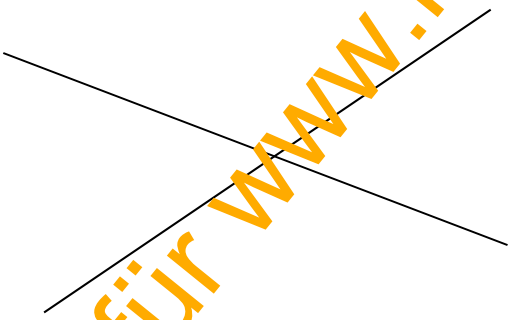
a)



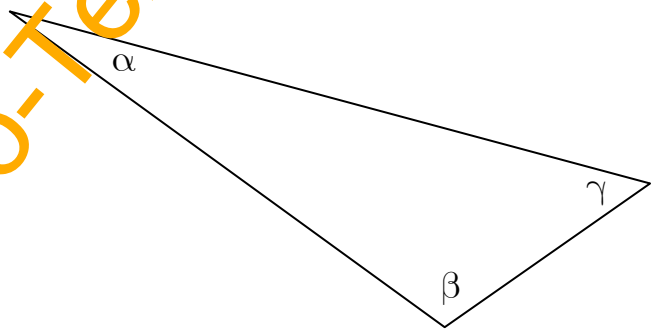
b)



c) Miss alle 4 Winkel:



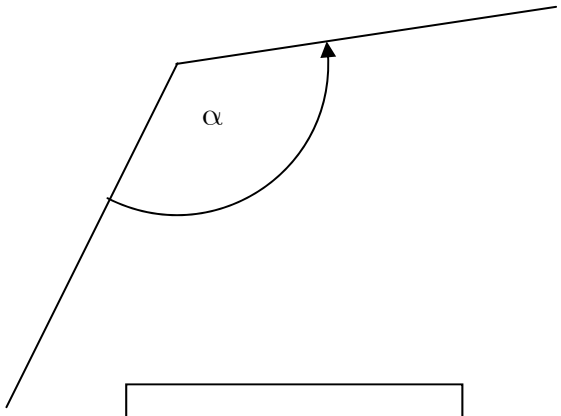
d) Welche Innenwinkel hat das Dreieck?

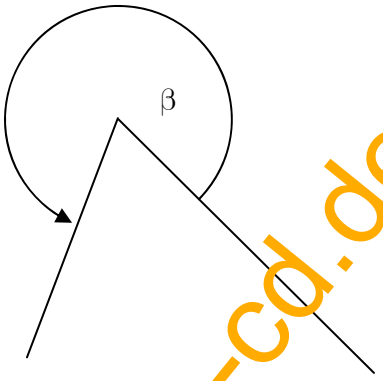


Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabenblatt 10

a) Miss diese Winkel:





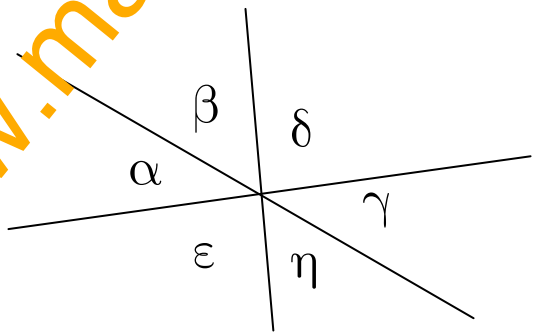
Ergebnis: $\alpha =$ $\beta =$

b)

Es ist bekannt, dass gilt: $\alpha + \beta = 93^{\circ}$.

Miss γ und berechne die restlichen Winkel.

Schreibe nicht nur das Ergebnis auf, sondern begründe dein Ergebnis durch Text oder Rechnung.

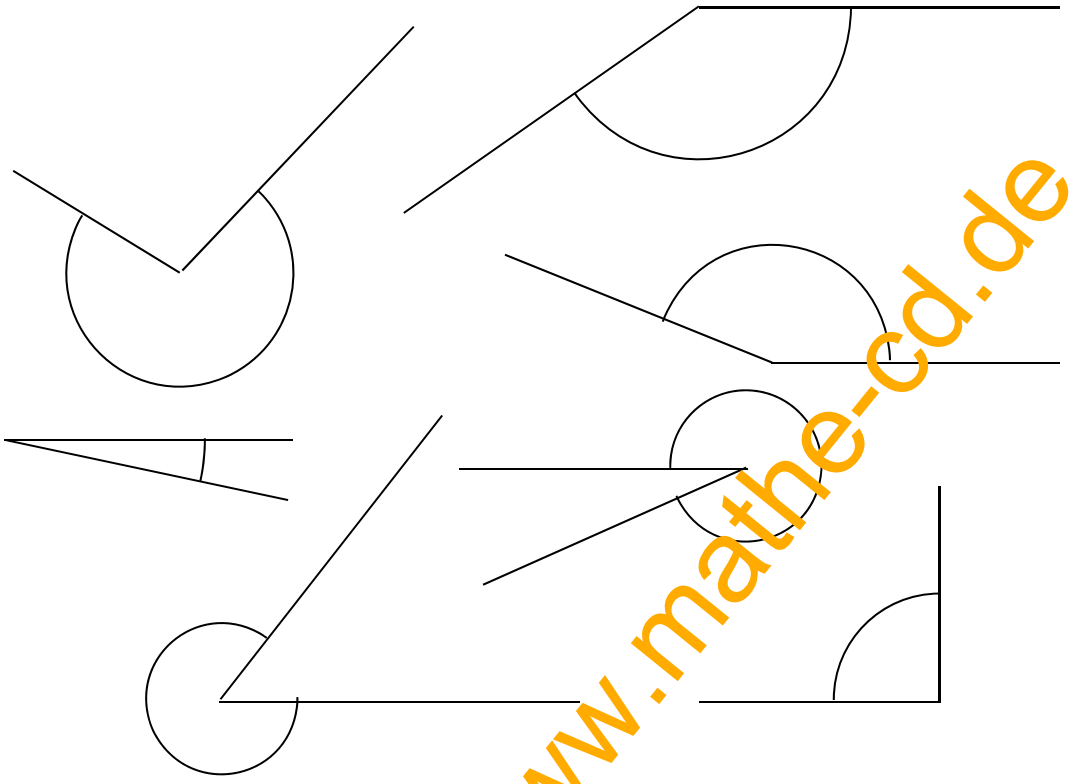


c) Zeichne hierher einen Winkel α mit 157° und einen Winkel β mit 214°.

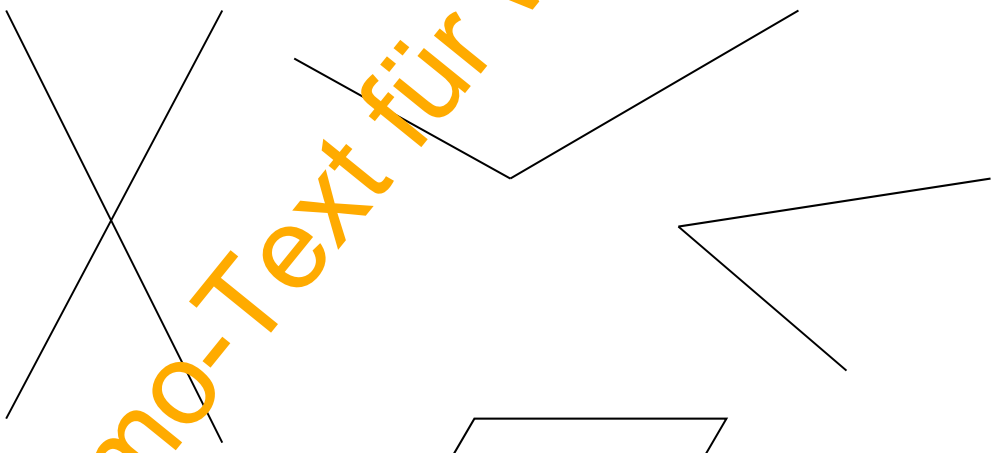
Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabenblatt 11

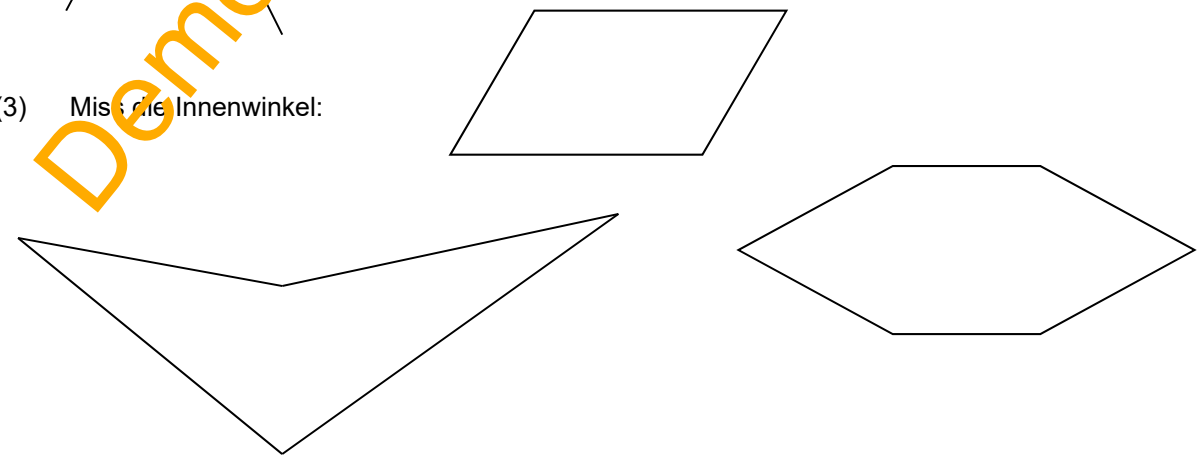
(1) Miss folgende Winkel:



(2) Miss <u>einen</u> Winkel und berechne die restlichen:



(3) Miss die Innenwinkel:



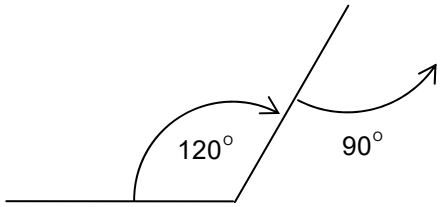
Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufgabenblatt 12

(1) Zeichne eine Winkelschlange. Die angegebenen Winkel liegen immer abwechselnd auf der anderen Seite. Die Strecken seien immer 3 cm lang:

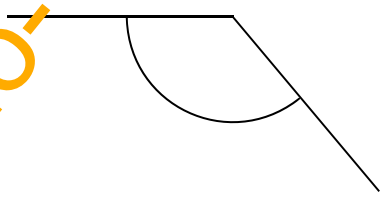
120°, 90°, 155°, 120°, 45°, 30°, 170° .

.



(2) Zeichne eine Winkelschlange. Die angegebenen Winkel liegen immer auf der gleichen Seite. Die Strecken seien immer 3 cm lang:

130°, 290°, 145°, 24°, 245°, 90°, 128° .



Demo-Text für www.mathe-cd.de